Computer Graphics

2D Transformation

Lecture 6

Transformations

- What are transformations?
  - The geometrical changes of an object from a current state to a modified state.
- Why are the transformations needed?
  - To manipulate the initially created object and to display the modified object without having to redraw it.
- Two-Dimensional Shape: That which has two dimensions, i.e., height and width.
  - 2D shapes do not have any thickness.
  - A point is 2-dimensional, and a line is one-dimensional.
  - Example of 2-Dimensional Shapes:

১. What are transformations? (ট্রান্সফরমেশন কী?)

বাংলা: ট্রান্সফরমেশন হলো একটা বস্তুর (object) জ্যামিতিক পরিবর্তন, যার মাধ্যমে বস্তুটিকে তার বর্তমান অবস্থা থেকে একটি পরিবর্তিত বা নতুন অবস্থায় রূপান্তর করা হয়।

English Definition: The geometrical changes of an object from a current state to a modified state.

- সহজ কথায়: মনে করো স্ক্রিনে একটা বৃত্ত (circle) আছে। তুমি সেটাকে টেনে বড় করলে, বা এক জায়গা থেকে অন্য জায়গায় সরিয়ে নিলে, কিংবা একটু ঘুরিয়ে দিলে। এই যে জ্যামিতিক পরিবর্তনগুলো করছ, এটাই হলো **Transformation**।

২. Why are the transformations needed? (ট্রান্সফরমেশন কেন প্রয়োজন?)

বাংলা: প্রাথমিকভাবে তৈরি করা কোনো অবজেক্টকে নতুন করে পুনরায় না এঁকে, সেটিকে ম্যানিপুলেট (manipulate - নিয়ন্ত্রণ বা পরিবর্তন) করার জন্য এবং স্ক্রিনে তার পরিবর্তিত রূপটি দেখানোর জন্য ট্রান্সফরমেশন প্রয়োজন।

English Definition: To manipulate the initially created object and to display the modified object without having to redraw it.

- সহজ কথায়: কোড লিখে বা কষ্ট করে একটা জটিল ড্রয়িং করার পর, সেটাকে যদি স্ক্রিনের অন্য কোথাও নিতে হয়, তবে নতুন করে আবার পুরোটা আঁকার কোনো দরকার নেই। জাস্ট **Transformation** ব্যবহার করে আমরা খুব সহজেই সেটার পজিশন, সাইজ বা ডিরেকশন চেঞ্জ করে ফেলতে পারি। এতে কম্পিউটারের পরিশ্রম এবং সময় দুই-ই বাঁচে!

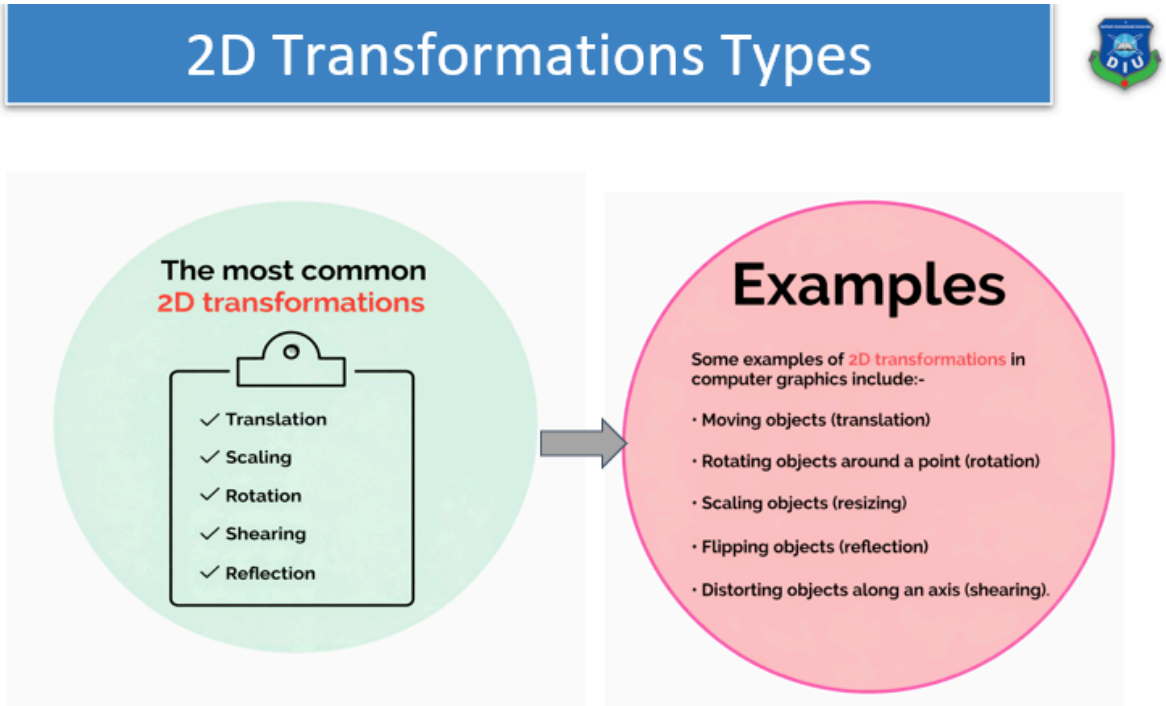
৩. Two-Dimensional Shape (দ্বিমাত্রিক আকৃতি বা 2D Shape)

বাংলা: টু-ডিমেনশনাল শেপ বা দ্বিমাত্রিক আকৃতি বলতে সেগুলোকে বোঝায়, যেগুলোর কেবল দুটি মাত্রা (dimensions) থাকে— যেমন উচ্চতা (height) এবং প্রস্থ (width)।

English Definition: That which has two dimensions, i.e., height and width.

স্লাইডে 2D শেপ সম্পর্কে আরও কিছু পয়েন্ট বলা আছে:

- **2D shapes do not have any thickness:** 2D শেপগুলোর কোনো থিকনেস (thickness - পুরুত্ব বা গভীরতা) থাকে না। এগুলো একদম ফ্ল্যাট বা চ্যাপ্টা হয়।
- **A point is <u>2-dimensional</u>, and a line is one-dimensional:** এখানে স্লাইডে একটি ছোট ভুল বা মিসপ্রিন্ট আছে, যেটা তোমাকে খেয়াল রাখতে হবে! একটি **Point** (বিন্দু) আসলে **0-dimensional** (শূন্য-মাত্রিক) এবং একটি **Line** (রেখা) হলো **1-dimensional** (এক-মাত্রিক)। কিন্তু 2D স্পেসে বা গ্রাফে এদেরকে রিপ্রেজেন্ট করতে দুটি কো-অর্ডিনেট (x, y) লাগে, হয়তো সেই সেন্সে স্লাইডে পয়েন্টকে টু-ডিমেনশনাল বলা হয়েছে।
- **Example of 2-Dimensional Shapes:** স্লাইডের নিচের দিকে কিছু সুন্দর উদাহরণ দেওয়া আছে, যেমন— Circle (বৃত্ত), Rectangle (আয়তক্ষেত্র), Triangle (ত্রিকোণ বা ত্রিভুজ) এবং Pentagon (পঞ্চভুজ)। এগুলোর সবকটিই হলো 2D object।



2D Transformations Types (দ্বিমাত্রিক রূপান্তর এর প্রকারভেদ)

The most common 2D transformations (সবচেয়ে সাধারণ 2D ট্রান্সফরমেশনসমূহ)

বাংলা সংজ্ঞা: কম্পিউটার গ্রাফিক্সে কোনো দ্বিমাত্রিক অবজেক্ট বা বস্তুর অবস্থান, আকার কিংবা দিক পরিবর্তন করার জন্য প্রধানত ৫টি মৌলিক পদ্ধতি ব্যবহার করা হয়। এগুলোকে একত্রে মোস্ট কমন ট্রান্সফরমেশন বলা হয়।

English Definition: The most common techniques used to alter the position, size, or orientation of two-dimensional objects in computer graphics.

স্লাইডের বাম পাশের তালিকায় থাকা ৫টি মূল প্রকারভেদ নিচে দেওয়া হলো:

- **Translation** (স্থানান্তর বা পজিশন পরিবর্তন)
- **Scaling** (আকার পরিবর্তন বা রিসাইজিং)
- **Rotation** (আবর্তন বা নির্দিষ্ট কোণে ঘোরানো)
- **Shearing** (বিকৃতি বা অক্ষ বরাবর বাঁকানো)
- **Reflection** (প্রতিফলন বা আয়নায় প্রতিচ্ছবি তৈরি)

Examples of 2D Transformations (বাস্তব উদাহরণসমূহ)

বাংলা সংজ্ঞা: আমরা স্ক্রিনে বা বাস্তবে অবজেক্টের যে সমস্ত পরিবর্তন দেখি, সেগুলোর ওপর ভিত্তি করে নিচে প্রত্যেকটি ট্রান্সফরমেশনের সুনির্দিষ্ট উদাহরণ দেওয়া হলো।

English Definition: Practical applications of 2D transformations demonstrating how objects change dynamically on a screen.

ডান পাশের গোলাপি বৃত্তে থাকা উদাহরণগুলোর বিস্তারিত বিবরণ:

১. Moving objects (Translation)

- বাংলা ব্যাখ্যা: স্ক্রিনের এক স্থান থেকে অন্য স্থানে কোনো অবজেক্টকে সোজা লাইনে সরিয়ে নেওয়াকে Translation বলে।
- **English Definition:** Repositioning an object by sliding it along a straight line path from one coordinate location to another.
- সহজ উদাহরণ: গেম খেলার সময় একটি চরিত্র বা গাড়ি যখন বাম থেকে ডানে হেঁটে বা চলে যায়, তখন তার কো-অর্ডিনেট পরিবর্তন হয়। এটিই হলো Translation।

২. Rotating objects around a point (Rotation)

- বাংলা ব্যাখ্যা: কোনো একটি নির্দিষ্ট বিন্দু বা কেন্দ্রকে অক্ষ ধরে তার চারপাশে কোনো অবজেক্টকে একটি নির্দিষ্ট কোণে ঘোরানোকে Rotation বলে।
- **English Definition:** Turning an object about a specified fixed point called the rotation center by a certain angle.
- সহজ উদাহরণ: দেয়াল ঘড়ির কাঁটা যেভাবে ঘোরে কিংবা সিলিং ফ্যানের পাখা যেভাবে ঘোরে, সেটিই হলো গ্রাফিক্সের ভাষায় Rotation।

৩. Scaling objects (Resizing)

- বাংলা ব্যাখ্যা: অবজেক্টের মূল আকৃতিকে বড় বা ছোট করার প্রক্রিয়াকে Scaling বলা হয়।
- **English Definition:** Altering the size of an object by multiplying its coordinate values by scaling factors.
- সহজ উদাহরণ: স্মার্টফোনে কোনো ছবি দেখার সময় আমরা যখন দুই আঙুল দিয়ে জুম-ইন (বড়) বা জুম-আউট (ছোট) করি, তখন মূলত Scaling ঘটে।

৪. Flipping objects (Reflection)

- বাংলা ব্যাখ্যা: কোনো অবজেক্টকে আয়নার সামনে ধরলে যেমন উল্টো প্রতিচ্ছবি দেখা যায়, ঠিক সেভাবে অবজেক্টটিকে ১৮০ ডিগ্রী ফ্লিপ বা উল্টে দেওয়াকে Reflection বলে।
- **English Definition:** Creating a mirror image of an object by rotating it 180 degrees about a reflection axis.
- সহজ উদাহরণ: ফ্রন্ট ক্যামেরা দিয়ে সেলফি তোলার পর ছবিটি যখন ডান-বাম পাশে উল্টে (Mirror Effect) সেভ হয়, সেটাই হলো Reflection।

৫. Distorting objects along an axis (Shearing)

- বাংলা ব্যাখ্যা: কোনো অবজেক্টের সমান্তরাল রেখাগুলোকে ঠিক রেখে একটি নির্দিষ্ট অক্ষ (X বা Y অক্ষ) বরাবর তাকে বাঁকা বা হেলানো করে দেওয়াকে Shearing বলে।
- **English Definition:** Slanting the shape of an object along a specific direction while keeping the parallel lines parallel.
- সহজ উদাহরণ: একটি সোজা চারকোনা কাগজের বক্সকে উপর থেকে একপাশে চাপ দিলে সেটি যেভাবে কিছুটা বাঁকা বা রম্বসের মতো হয়ে যায়, গ্রাফিক্সে তাকে Shearing বলে।

Applications of 2D Transformations

- **Computer Animation & Games:** Movement is created by translating objects over time, while rotation and scaling simulate changes in orientation and distance.
- **Computer-Aided Design (CAD):** Designers use scaling to zoom, rotation to adjust components, and shearing to change shapes in drafting software.
- **Image Processing & Editing:** Digital images are transformed using reflection to mirror objects, rotation to align, and scaling to resize.
- **Graphical User Interfaces (GUIs):** Windows, icons, and menus are positioned, resized, and moved using translation and scaling.
- **Modeling & Viewing:** Geometrical transformations are used to map 2D scenes to different viewports, allowing for zooming effects and changing viewing perspectives.

Applications of 2D Transformations (2D ট্রান্সফরমেশন এর বাস্তব প্রয়োগ)

Computer Animation & Games (কম্পিউটার অ্যানিমেশন এবং গেমস)

বাংলা সংজ্ঞা: অ্যানিমেশন এবং গেমসে সময়ের সাথে সাথে অবজেক্টের মুভমেন্ট বা গতি তৈরি করতে Translation ব্যবহার করা হয়। অন্যদিকে অবজেক্টের দিক পরিবর্তন এবং দূরত্বের পরিবর্তন ফুটিয়ে তুলতে Rotation এবং Scaling ব্যবহার করা হয়।

English Definition: Movement is created by translating objects over time, while rotation and scaling simulate changes in orientation and distance.

- সহজ কথায়: যেকোনো ২ডি ভিডিও গেম (যেমন: Super Mario বা Angry Birds) খেলার সময় ক্যারেক্টারগুলো যখন সামনে-পেছনে দৌড়ায়, তখন সেখানে **Translation** কাজ করে। ক্যারেক্টারটি যখন লাফ দিয়ে ডিগবাজি খায় তখন **Rotation** হয়, আর দূর থেকে কোনো বস্তু সামনে এসে বড় হওয়া বা দূরে গিয়ে ছোট হওয়া বোঝাতে **Scaling** ব্যবহার করা হয়।

Computer-Aided Design - CAD (কম্পিউটার-এইডেড ডিজাইন)

বাংলা সংজ্ঞা**:** ড্রাফটিং বা ডিজাইন সফটওয়্যারগুলোতে ডিজাইনাররা অবজেক্টকে জুম করার জন্য Scaling, বিভিন্ন পার্টস বা উপাদানগুলোকে সঠিক জায়গায় বসানোর জন্য Rotation এবং কোনো আকৃতিকে বাঁকা বা পরিবর্তন করার জন্য Shearing ব্যবহার করেন।

English Definition: Designers use scaling to zoom, rotation to adjust components, and shearing to change shapes in drafting software.

- সহজ কথায়**:** ইঞ্জিনিয়ার বা আর্কিটেক্টরা যখন কম্পিউটার সফটওয়্যার (যেমন: AutoCAD) দিয়ে কোনো বাড়ি, গাড়ি বা যন্ত্রাংশের নিখুঁত নকশা তৈরি করেন, তখন ড্রয়িংয়ের ছোট অংশ বড় করে দেখতে, পার্টসগুলো ঘুরিয়ে ফিট করতে এবং শেপ পরিবর্তন করতে এই ট্রান্সফরমেশনগুলো প্রতিনিয়ত ব্যবহার করা হয়।

Image Processing & Editing (ইমেজ প্রসেসিং এবং এডিটিং)

বাংলা সংজ্ঞা**:** ডিজিটাল ছবি এডিটিংয়ের ক্ষেত্রে অবজেক্টের মিরর ইমেজ বা উল্টো প্রতিচ্ছবি তৈরি করতে Reflection, ছবিকে সোজা বা নির্দিষ্ট কোণে ঘোরাতে Rotation এবং ছবির সাইজ ছোট-বড় করার জন্য Scaling এর মাধ্যমে রূপান্তর করা হয়।

English Definition: Digital images are transformed using reflection to mirror objects, rotation to align, and scaling to resize.

- সহজ কথায়**:** আমরা যখন মোবাইলে বা ফটোশপে কোনো ছবি এডিট করি— যেমন ছবি ক্রপ করে ছোট-বড় করা (**Scaling**), বাঁকা ছবিকে সোজা করা (**Rotation**), কিংবা ছবির ডান-বাম পাশ উল্টে দেওয়া (**Reflection**), এই সবকিছুর পেছনেই রয়েছে ইমেজ প্রসেসিং ও ট্রান্সফরমেশনের কাজ।

Graphical User Interfaces - GUIs (গ্রাফিক্যাল ইউজার ইন্টারফেস)

বাংলা সংজ্ঞা**:** কম্পিউটারের বিভিন্ন উইন্ডো, আইকন এবং মেনুগুলোকে স্ক্রিনের সঠিক জায়গায় প্লেস বা স্থাপন করতে, রিসাইজ করতে এবং এক জায়গা থেকে অন্য জায়গায় সরাতে Translation এবং Scaling ব্যবহার করা হয়।

English Definition: Windows, icons, and menus are positioned, resized, and moved using translation and scaling.

- সহজ কথায়**:** তুমি যখন কম্পিউটারে কোনো সফটওয়্যার বা ফোল্ডারের উইন্ডো মাউস দিয়ে টেনে স্ক্রিনের অন্য জায়গায় নিয়ে যাও (**Translation**), কিংবা উইন্ডোর কোণায় ধরে টেনে সেটাকে ছোট বা বড় করো (**Scaling**), সেটাই হলো GUI-তে ট্রান্সফরমেশনের প্রয়োগ।

Modeling & Viewing (মডেলিং এবং ভিউয়িং)

বাংলা সংজ্ঞা**:** ২ডি সিন বা দৃশ্যগুলোকে বিভিন্ন ভিউপোর্টে (ভিউইং স্ক্রিনে) ম্যাপ বা উপস্থাপন করতে জ্যামিতিক ট্রান্সফরমেশন ব্যবহার করা হয়, যা জুম-ইন/আউট ইফেক্ট এবং দেখার পারসপেক্টিভ বা কোণ পরিবর্তন করতে সাহায্য করে।

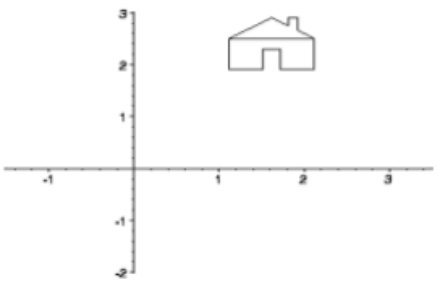
English Definition: Geometrical transformations are used to map 2D scenes to different viewports, allowing for zooming effects and changing viewing perspectives.

- সহজ কথায়: একটি বড় গ্রাফিক্স ডিজাইনের বা ম্যাপের কোন অংশটি স্ক্রিনের কতটুকু জায়গায় এবং কেমন কোণ থেকে দেখাবে (যেমন: গুগল ম্যাপে জুম করে কোনো নির্দিষ্ট রাস্তা দেখা), তা নিয়ন্ত্রণ করার জন্য এই মডেলিং এবং ভিউয়িং ট্রান্সফরমেশন ব্যবহার করা হয়।

2D Transformations (Translation)

- Translation is a process of changing the position of an object in a straight-line path from one coordinate location to another.
- We can translate a two-dimensional point by adding translation distances, tx and ty.
- Suppose the original position is (x, y); then the new position is (x′, y′).

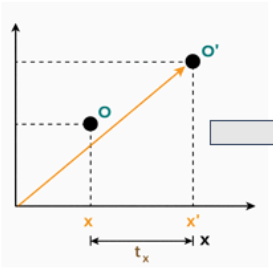
Translation of objects

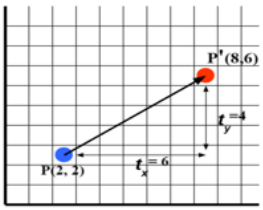


Here,

x′ = x + tx (This denotes translation towards X axis.)
y′ = y + ty (This denotes translation towards Y axis.)

2D Transformations (Translation)





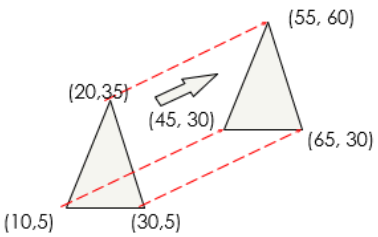
$P(x, y)$ move to $P'(x', y')$

x′ = x + tx
y′ = y + ty

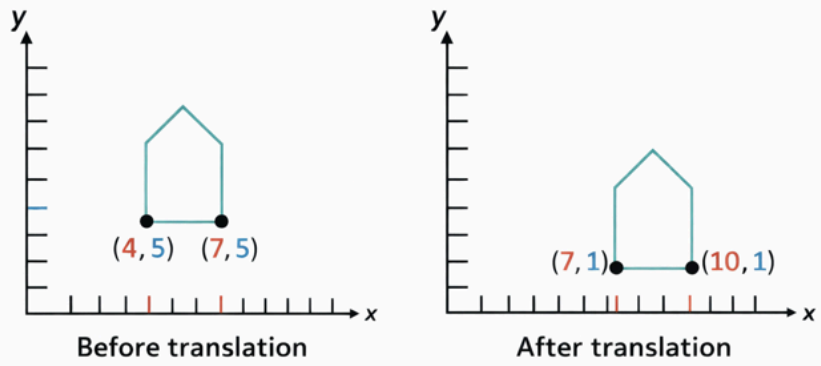
- Represent in a matrix.

$$P=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad P'=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \quad T=\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

$$P' = P + T \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$



2D Transformations (Translation Example)



Translation of a house

Here $(X_1, Y_1) = (4, 5)$, $(X_2, Y_2) = (7, 5)$ and $t_x = 3$, $t_y = -4$.
So, $(X_1', Y_1') = (4 + 3, 5 - 4) = (7, 1)$ and
$(X_2', Y_2') = (7 + 3, 5 - 4) = (10, 1)$.

2D Transformations (Scaling)

- A scaling transformation changes the size of an object.
- This operation can be carried out for polygons by multiplying the coordinate values (x, y) of each vertex by scaling factors Sx and Sy to produce the transformed coordinates (x′, y′).

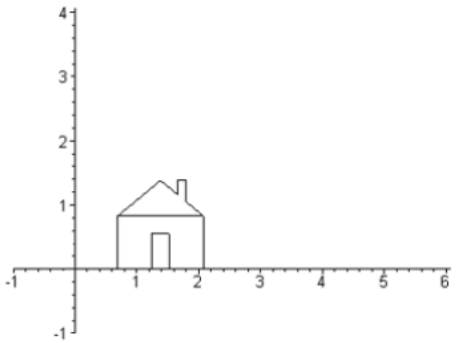
$$x' = xS_x$$

$$y' = yS_y$$

- Represent in a matrix.

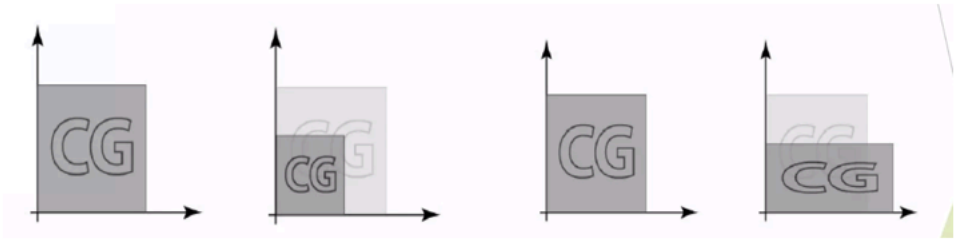
$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \qquad P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

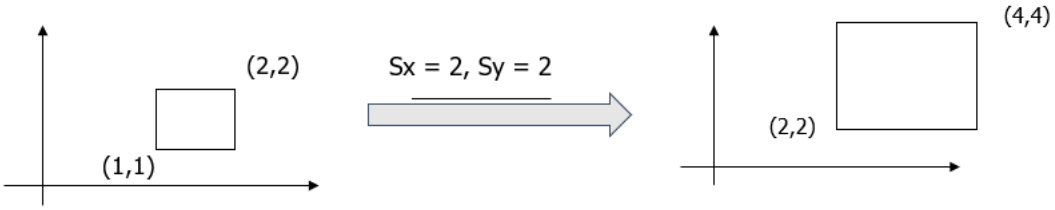
$$P' = S \cdot P = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



Scaling of objects

2D Transformations (Scaling)





2D Transformations (Scaling Example)

Given a square object with coordinate points A(0, 3), B(3, 3), C(3, 0), and D(0, 0). Apply the scaling parameter 2 towards the X axis and 3 towards the Y axis and obtain the new coordinates of the object.

Solutions:

Given-
Old corner coordinates of the square = A (0, 3), B(3, 3), C(3, 0), D(0, 0)
Scaling factor along X axis, S_x= 2
Scaling factor along Y axis, S_y= 3

For Coordinates A (0, 3)

Let the new coordinates of corner A after scaling $= (x', y')$.

Applying the scaling equations, we have-

$$x' = x \times S_x = 0 \times 2 = 0$$
$$y' = y \times S_y = 3 \times 3 = 9$$

Thus, New coordinates of corner A after scaling=(0, 9).

For Coordinates B (3, 3)

Let the new coordinates of corner B after scaling $= (x', y')$.

Applying the scaling equations, we have-

$$x' = x \times S_x = 3 \times 2 = 6$$
$$y' = y \times S_y = 3 \times 3 = 9$$

Thus, New coordinates of corner B after scaling (6, 9).

2D Transformations (Scaling Example)

Given a square object with coordinate points A(0, 3), B(3, 3), C(3, 0), and D(0, 0). Apply the scaling parameter 2 towards the X axis and 3 towards the Y axis and obtain the new coordinates of the object.

Solutions:

For Coordinates C (3, 0)

Let the new coordinates of corner C after scaling $= (x', y')$.

Applying the scaling equations, we have-

$$x' = x \times S_x = 3 \times 2 = 6$$
$$y' = y \times S_y = 0 \times 3 = 0$$

Thus, New coordinates of corner C after scaling=**(6, 0)**.

For Coordinates D (0, 0)

Let the new coordinates of corner D after scaling $= (x', y')$.

Applying the scaling equations, we have-

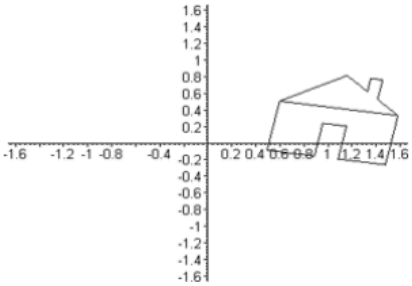
$$x' = x \times S_x = 0 \times 2 = 0$$
$$y' = y \times S_y = 0 \times 3 = 0$$

Thus, New coordinates of corner D after scaling=**(0, 0)**.

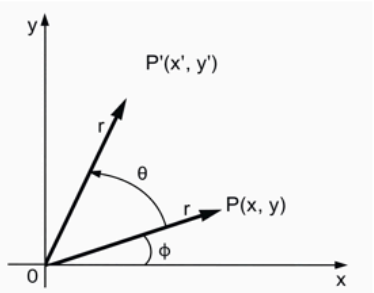
2D Transformations (Rotation)

- A two-dimensional rotation is applied to an object by repositioning it along a circular path in the xy-plane.
- Initial angle of the object P with respect to origin = Φ
- Rotation angle = θ
- Let us suppose you want to rotate it at the angle θ. After rotating it to a new location, you will get a new point P' (x', y').
- This rotation is achieved by using the following rotation equations:

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$



Rotation of objects



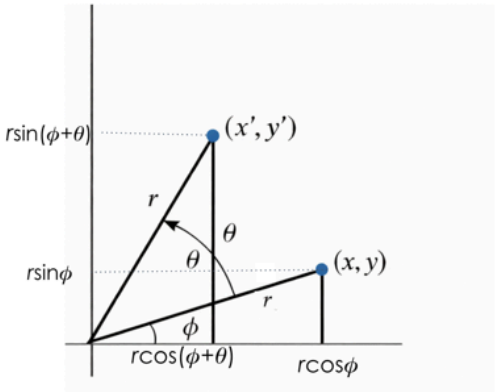
2D Transformations (Rotation)

Derivation of the rotation:

$$x = r \cdot \cos\phi$$
$$y = r \cdot \sin\phi$$

$$x' = r \cdot \cos(\phi + \theta)$$
$$= r \cdot \cos\phi \cdot \cos\theta - r \cdot \sin\phi \cdot \sin\theta$$
$$y' = r \cdot \sin(\phi + \theta)$$
$$= r \cdot \cos\phi \cdot \sin\theta + r \cdot \sin\phi \cdot \cos\theta$$

$$x' = x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta$$
$$y' = x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta$$



2D Transformations (Rotation)

Derivation of the rotation (continued):

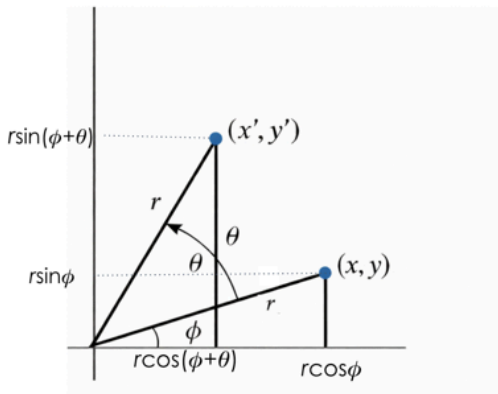
$$x' = x.\cos\theta - y.\sin\theta$$
$$y' = x.\sin\theta + y.\cos\theta$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Rewriting in matrix form gives us :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$P' = R \cdot P$$



2D Transformations (Rotation Example)

Given a line segment with starting point as (0, 0) and ending point as (4, 4). Apply a 30-degree rotation in the anticlockwise direction on the line segment and find out the new coordinates of the line.

Solutions:

We rotate a straight line by its end points with the same angle. Then, we redraw a line between the new end points.

Given-
Old ending coordinates of the line = (x, y) = (4, 4)
Rotation angle = θ = 30°
Let the new ending coordinates of the line after rotation be (x', y').

Applying the rotation equations, we have

x'

= xcosθ – ysinθ
= 4 x cos30° – 4 x sin30°
= 4 x (√3 / 2) – 4 x (1 / 2)
= 2√3 – 2
= 2(√3 – 1)
= 2(1.73 – 1)
= 1.46

y'
= xsinθ + ycosθ
= 4 x sin30° + 4 x cos30°
= 4 x (1 / 2) + 4 x (√3 / 2)
= 2 + 2√3
= 2(1 + √3)
= 2(1 + 1.73)
= 5.46

2D Transformations (Rotation Example)

Alternatively,

In matrix form, the new ending coordinates of the line after rotation may be obtained as

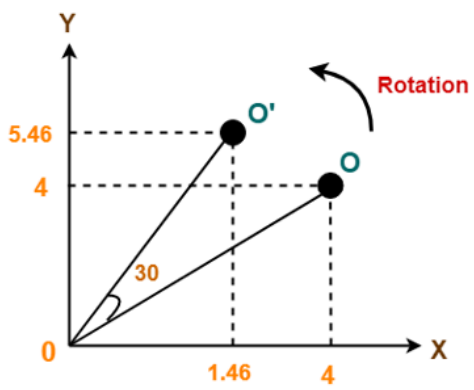
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \times \cos 30^\circ - 4 \times \sin 30^\circ \\ 4 \times \sin 30^\circ + 4 \times \cos 30^\circ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(0.866) - 4(0.5) \\ 4(0.5) + 4(0.866) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.464 - 2 \\ 2 + 3.464 \end{bmatrix}$$

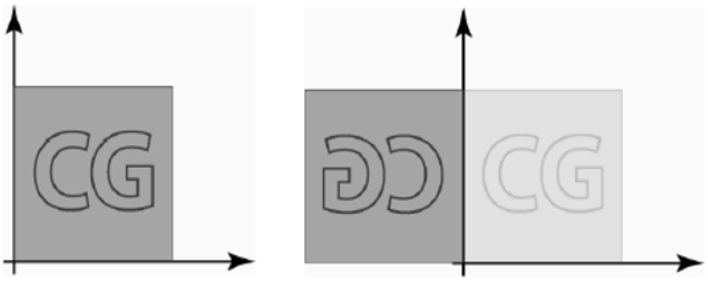
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.46 \\ 5.46 \end{bmatrix}$$



Thus, the new ending coordinates of the line after rotation are (1.46, 5.46).

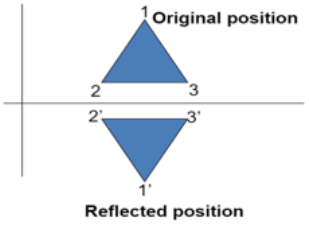
2D Transformations (Reflection)

- Reflection is the mirror image of the original object. In other words, we can say that it is a rotation operation with 180°.
- In reflection transformation, the size of the object does not change.



2D Transformations (Reflection)

Reflection on X-Axis:



Reflection about the line y = 0, the X-axis, is accomplished with the transformation matrix.

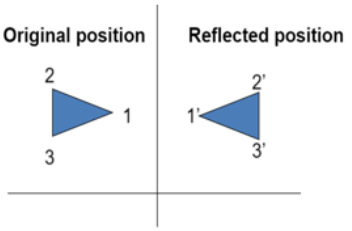
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

This reflection is achieved by using the following reflection equations:

- x' = x
- y'= -y

2D Transformations (Reflection)

Reflection on Y-Axis:



Reflection about the line x = 0, the Y-axis, is accomplished with the transformation matrix.

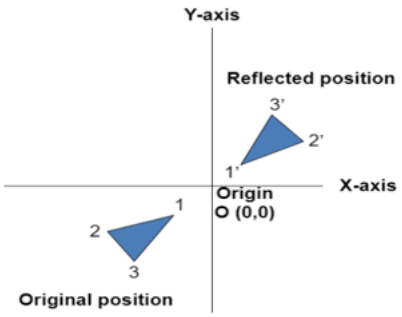
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

This reflection is achieved by using the following reflection equations:

- x' = -x
- y'= y

2D Transformations (Reflection)

Reflection about an axis perpendicular to xy plane and passing through origin:



The matrix of this transformation is given below

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

This reflection is achieved by using the following reflection equations:

- x' = -x
- y'= -y

In this value of x and y, both will be reversed. This is also called a half revolution about the origin.

2D Transformations (Scaling Example)

Given a triangle with coordinate points A(3, 4), B(6, 4), and C(5, 6). Apply the reflection on the X axis and obtain the new coordinates of the object.

Solutions:

For a reflection across the x-axis, the matrix equation is:

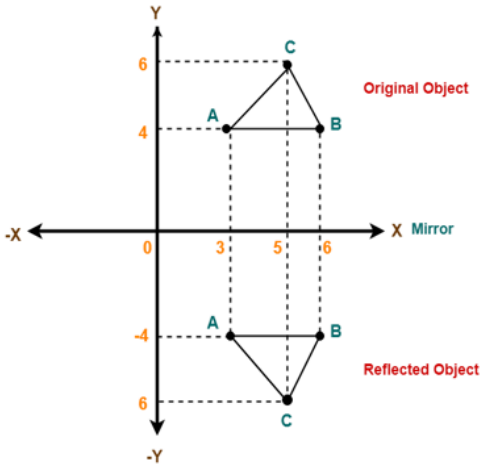
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

For Point A (3, 4): $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 \cdot 3) + (0 \cdot 4) \\ (0 \cdot 3) + (-1 \cdot 4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$

For Point B (6, 4): $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix}$

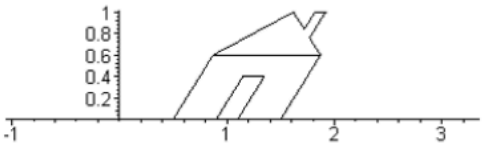
For Point C(5, 6): $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \end{bmatrix}$

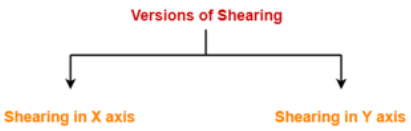
New Point: A' = (3, -4), B' = (6, -4), C' = (5, -6)

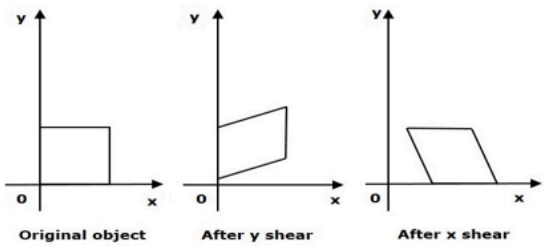


2D Transformations (Shearing)

- Shear is a transformation that distorts the shape of an object such that the transformed shape appears as if the object were composed of internal layers that had been caused to slide over each other
- Two common shearing transformations are those that shift coordinate x values and those that shift y values







2D Transformations (Shearing)

- Consider a point object O that has to be sheared in a 2D plane.

Let-

- Initial coordinates of the object O = (X, Y)
- Shearing parameter towards X direction = Sh_x
- Shearing parameter towards Y direction = Sh_y
- New coordinates of the object O after shearing = (X, Y)

Shearing in X Axis-

Shearing in X axis is achieved by using the following shearing equations:

- $x' = x + Sh_x \cdot y$
- $y' = y$

In Matrix form, the above shearing equations may be represented as

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Sh_x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Shearing in Y Axis-

Shearing in Y axis is achieved by using the following shearing equations:

- $x' = x$
- $y' = y + Sh_y \cdot x$

In Matrix form, the above shearing equations may be represented as

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Sh_y & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

2D Transformations (Shearing Example)

Given a triangle with points (1, 1), (0, 0) and (1, 0). Apply shear parameter 2 on X axis and 2 on Y axis and find out the new coordinates of the object.

Solutions:

Initial coordinates of the triangle = A (1, 1), B(0, 0), C(1, 0)
Shearing parameter towards X direction $Sh_x = 2$
Shearing parameter towards Y direction $Sh_y = 2$

Shearing in X Axis-

For Coordinates A(1, 1)

Let the new coordinates of corner A after shearing be (x', y').

Applying the shearing equations, we have:

- $x' = x + Sh_x \times y = 1 + 2 \times 1 = 3$
- $y' = y = 1$

Thus, New coordinates of corner A after shearing = **(3, 1)**.

For Coordinates B(0, 0)

Let the new coordinates of corner B after shearing be (x', y').

Applying the shearing equations, we have:

- $x' = x + Sh_x \times y = 0 + 2 \times 0 = 0$
- $y' = y = 0$

Thus, New coordinates of corner B after shearing = **(0, 0)**.

2D Transformations (Shearing Example)

Given a triangle with points (1, 1), (0, 0) and (1, 0). Apply shear parameter 2 on the X axis and 2 on the Y axis and find out the new coordinates of the object.

Solutions:

For Coordinates C(1, 0)

Let the new coordinates of corner C after shearing be (x', y').

Applying the shearing equations, we have:

- $x' = x + Sh_x \times y = 1 + 2 \times 0 = 1$
- $y' = y = 0$

Thus, New coordinates of corner C after shearing = **(1, 0)**.

Thus, New coordinates of the triangle after shearing in X axis = A (3, 1), B(0, 0), C(1, 0).

2D Transformations (Shearing Example)

Given a triangle with points (1, 1), (0, 0) and (1, 0). Apply shear parameter 2 on X axis and 2 on Y axis and find out the new coordinates of the object.

Solutions:

Initial coordinates of the triangle = A (1, 1), B(0, 0), C(1, 0)
Shearing parameter towards X direction Sh_x = 2
Shearing parameter towards Y direction Sh_y= 2

Shearing in Y Axis-

For Coordinates A(1, 1)

Let the new coordinates of corner A after shearing be (x', y').

Applying the shearing equations, we have:

- $x' = x = 1$
- $y' = y + Sh_y \times x = 1 + 2 \times 1 = 3$

Thus, New coordinates of corner A after shearing = **(1, 3)**.

For Coordinates B(0, 0)

Let the new coordinates of corner B after shearing be (x', y').

Applying the shearing equations, we have:

- $x' = x = 0$
- $y' = y + Sh_y \times x = 0 + 2 \times 0 = 0$

Thus, New coordinates of corner B after shearing = **(0, 0)**.

2D Transformations (Shearing Example)

Given a triangle with points (1, 1), (0, 0) and (1, 0). Apply shear parameter 2 on the X axis and 2 on the Y axis and find out the new coordinates of the object.

Solutions:

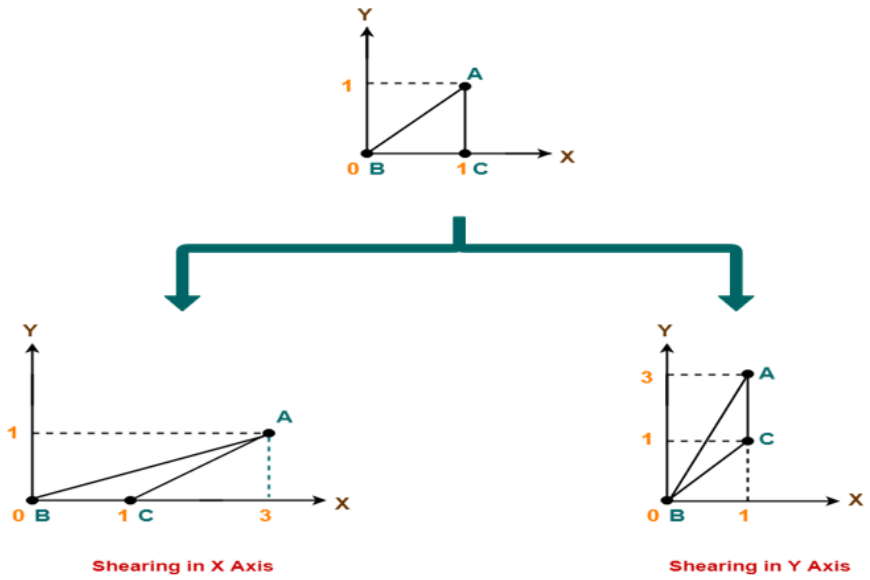
For Coordinates C(1, 0)

Let the new coordinates of corner C after shearing be (x', y').

Applying the shearing equations, we have:

- $x' = x = 1$
- $y' = y + Sh_y \times x = 0 + 2 \times 1 = 2$

Thus, New coordinates of corner C after shearing = **(1, 2)**.

Thus, New coordinates of the triangle after shearing in Y axis = A (1, 3), B(0, 0), C(1, 2).

2D Transformations (Shearing Example)